12. Exemple şi contraexemple în analiza matematică

Exemplele şi contraexemplele în matematică reprezintă de multe ori răspunsuri la o intensă dorinţă de a pune de acord intuiţia cu rigoarea raţionamentului ştiinţific. Este verificat însă că intuiţia ne joacă, nu de puţine ori, feste şi că exemple născute în urma unor eforturi îndelungate sau din contră apărute ca o revelaţie, spulberă ceea ce era aproape evidenţa însăşi. Alteori exemplele şi contraexemplele demonstrează că anumite rezultate nu pot fi substanţial îmbunătăţite dacă se slăbeşte prea mult ipoteza, derivând de aici necesitatea ca teoria să fie aplicată şi utilizată cu extremă exactitate.

În cele ce urmează vor fi prezentate unele rezultate de analiză, ele însele interesante sau care conduc uneori la concluzii surprinzătoare.

12.1. Completări şi precizări teoretice

Despre şiruri de numere raţionale convergente.

Se ştie că orice număr real este limită a unui şir de numere raţionale. Astfel, dacă un şir cu termenii numere raţionale converge la un număr iraţional, şirul numitorilor sau al numărătorilor termenilor poate fi mărginit ? Dar dacă şirul este neconstant şi converge la un număr raţional ?

12.1.1. Propoziţie Dacă $(r_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere raţionale $\left(r_n = \dfrac{p_n}{q_n},\ p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^* \right)$, convergent la un număr iraţional x_0, atunci $(q_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Demonstraţie: Presupunem că şirul $(q_n)_{n\geq 1}$ nu are limita $+\infty$. El admite atunci un subşir constant nenul $(q_{k_n})_{n\geq 1}$. Şirul $(p_{k_n})_{n\geq 1}$ este un şir de numere întregi care nu poate să aibă limita $-\infty$ sau $+\infty$ (altfel şirul $(r_{k_m})_{n\geq 1}$ ar avea limita $-\infty$ sau $+\infty$ şi nu x_0 cum are de fapt). Rezultă că şi şirul $(p_{k_n})_{n\geq 1}$ admite un subşir constant. Se obţine că şirul $(r_n)_{n\geq 1}$ admite un subşir constant. Acest subşir are o limită număr raţional ceea ce contrazice ipoteza că $(r_n)_{n\geq 1}$ este convergent la numărul iraţional x_0. Rezultă că presupunerea făcută a fost falsă şi deci $(q_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Un rezultat analog se poate preciza şi pentru şirul modulului numărătorilor.

Într-un limbaj mai puţin exact, am demonstrat că pentru ca un număr iraţional să poată fi aproximat cu o eroare din ce în ce mai mică, cu ajutorul unor numere raţionale, acestea din urmă vor trebui să aibă numitori şi numărători din ce în ce mai mari.

12.1.2. Propoziţie Fie $(r_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere raţionale $\left(r_n = \dfrac{p_n}{q_n},\ p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^*\right)$ convergent la un număr raţional x_0. Dacă $(q_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci şirul $(r_n)_{n\geq 1}$ este constant începând cu un anumit rang.

Demonstraţie: Din imaginea şirului $(q_n)_{n\geq 1}$, care este finită, reţinem doar mulţimea A formată din acele numere naturale nenule care sunt valori a unui număr infinit de termeni ai acestui şir. Eliminăm termenii şirului $(q_n)_{n\geq 1}$ care nu aparţin mulţimii A. Numărul acestor termeni este evident finit. Există aşadar $n_0 \in \mathbb{N}^*$ asfel încât $q_n \in A,\ (\forall)\ n \geq n_0$.

Şirul $(q_n)_{n\geq n_0}$ poate fi acum „împărţit în totalitate" într-un număr finit de subşiruri constante care au valorile termenilor din A. Fie $(q_n)_{n\geq n_0}$ un astfel de subşir constant egal cu α. Subşirul $(p_{k_n})_{n\geq n_0}$ este convergent la $\alpha \cdot x_0$ şi are toţi termenii numere întregi, rezultând că şi acest subşir este constant începând cu un anumit rang $n_1 \geq n_0$. Atunci şirul $(r_{k_n})_{n\geq n_1}$ este constant, constanta neputând fi decât x_0. Se procedează similar cu toate subşirurile care au valorile termenilor în A.

12.1.3. Corolar. Dacă $(r_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere raţionale $\left(r_n = \dfrac{p_n}{q_n},\ p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^*\right)$ convergent la un număr raţional x_0 şi dacă $r_n \neq x_0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(q_n)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$.

Proprietăţi de continuitate ale unor funcţii.

Intuitiv, continuitatea ca interpretare geometrică este percepută, în cele mai multe dintre cazuri, ca fiind proprietatea în urma căreia graficul unei funcţii poate fi trasat fără a ridica creionul de pe hârtie.

Astfel este uşor să construim funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au un singur punct de discontinuitate, modificând într-un singur punct valoarea unei funcţii continue.

Faptul că realitatea legată de funcţiile continue este mai complexă este relevat de exemple ale unor funcţii continue într-un singur punct. Se pot construi nenumărate exemple de acest fel dacă avem în vedere următorul rezultat:

12.1.4. Propoziţie Dacă $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sunt două funcţii continue, atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este continuă în x_0 dacă şi numai dacă $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

Ne întrebăm în mod firesc, cât de multe pot fi punctele de discontinuitate ale unei funcţii ?

12.1.5. Propoziţie Există funcţii care sunt discontinue în orice punct al domeniului lor de definiţie.

Demonstraţie: Funcţia lui Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

are toate punctele din $\mathbb{R}$ puncte de discontinuitate de speţa a II-a.

12.1.6. Propoziţie Există funcţii definite pe un interval I care să fie discontinue doar pe mulţimea numerelor raţionale din I.

Demonstraţie: Funcţia lui Riemann $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \text{ sau } x = 0 \\ \dfrac{1}{q}, \text{ dacă } x = \dfrac{p}{q} \text{ unde } p, q \in \mathbb{N}^* \text{ sunt prime între ele,} \end{cases}$$

este continuă în $x = 0$ şi în toate punctele iraţionale din [0, 1] şi este discontinuă în toate punctele raţionale nenule din [0, 1]

Fie $x_0 \in [0,1]$. Este suficient să considerăm în continuare $(t_n)_{n \ge 1}$ un şir de elemente din [0, 1], cu toţi termenii raţionali sau toţi iraţionali, diferiţi de x_0, dar convergent la x_0,

Dacă $t_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, iar $t_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, unde $p_n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in \mathbb{N}^*$, atunci, conform propoziţiei 12.1.1. şi corolarului 12.1.3. avem $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = +\infty$.

Rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{q_n} = 0.$

Dacă $t_n \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$.

În condițiile în care $f(x_0)=0$ (deci dacă x_0 este 0 sau irațional), funcția f este continuă în x_0. Evident dacă $f(x_0)\neq 0$ (deci dacă x_0 este rațional nenul) funcția f nu este continuă în x_0.

Așadar concluzia propoziției este adevărată dacă se consideră restricția funcției Riemann la (0, 1]

12.1.7. Observație Funcția lui Riemann este peste tot nederivabilă.

Demonstrație: Vom arăta pentru început că funcția Riemann este nederivabilă în punctul 0.

Dacă $(t_n)_{n\geq 1}$ este un șir cu termenii iraționali, din [0, 1], convergent la 0, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(0)}{t_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{t_n}=0 \tag{1}$$

Șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este format din termeni nenuli situați în [0, 1] și este convergent la 0. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0}=1 \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că funcția f a lui Riemann nu are derivată în 0.

În celelalte puncte raționale din [0, 1] funcția este nederivabilă, nefiind nici măcar continuă.

Fie acum x_0 un număr irațional din [0, 1].

Dacă $(t_n)_{n\geq 1}$ este un șir cu termenii iraționali, din $[0,1]\setminus\{x_0\}$, convergent la x_0, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{t_n-x_0}=0\,. \tag{3}$$

Fie $(t_n)_{n\geq 1}$, unde $t_n=\frac{[10^n\cdot x_0]}{10^n}$ ($(t_n)_{n\geq 1}$ este de fapt șirul aproximărilor lui x_0 cu n zecimale exacte). Se demonstrează ușor că $(t_n)_{n\geq 1}$ este din [0, 1] și că este convergent la x_0. De asemenea $0<x_0-t_n<\frac{1}{10^n}$.

Deoarece t_n, scris ca mai înainte s-ar putea să nu fie o fracție ireductibilă, rezultă că scriindu-l ca fracție ireductibilă $t_n = \frac{p_n}{q_n}$, unde $p_n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in \mathbb{N}^*$, avem $q_n \le 10^n$. Obținem astfel:

$$\left|\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}\right| = \left|\frac{\frac{1}{q_n}-0}{t_n-x_0}\right| = \frac{1}{q_n(x_0-t_n)} > \frac{1}{10^n \cdot \frac{1}{10^n}} = 1.$$

Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}$ chiar dacă există nu poate fi egală cu 0. Ținând seama și de relația (3), rezultă că f nu admite derivată în x_0.

Continuitatea și proprietatea lui Darboux.

Este cunoscută „apropierea" dintre noțiunea de continuitate a unei funcții pe un interval și proprietatea lui Darboux. La o analiză mai aprofundată însă diferențele dintre ele pot deveni surprinzător de mari.

Convenim ca în continuare, prin interval, să înțelegem interval nedegenerat. Este clasic următorul rezultat (vezi R6.2.13 a):

12.1.8. Propoziție Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ \alpha, & \text{dacă } x=0\end{cases}$

este discontinuă în $x = 0$. Ea are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă $\alpha\in[-1,1]$.

Cât de "bogată" poate fi mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții care are proprietatea lui Darboux ? Un posibil răspuns este conținut în :

12.1.9. Propoziție Există funcții cu proprietatea lui Darboux și care sunt discontinue în toate punctele intervalului de definiție.

Demonstrație: Exemplul pe care îl vom prezenta i se datorează, într-o formă ușor modificată, matematicianului francez Henri Lebesgue.

Amintim că orice $x \in [0,1)$ admite o scriere în baza 2 fără perioada 1 și în plus putem conveni că $1 = 0{,}1111\ldots$.

Considerăm funcția $f:[0,1]\to[0,1]$ definită astfel: pentru fiecare $x\in[0,1]$ scris în baza 2 sub forma $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } (\forall)\ k\in\mathbb{N} \text{ șirul } (a_{2n+1})_{n\ge k} \text{ nu este periodic}\\ 0{,}a_{2k+2}a_{2k+4}a_{2k+6}\ldots, & \text{dacă șirul } (a_{2n+1})_{n\ge k} \text{ este periodic cu rangul } k.\end{cases}$$

În continuare vom arăta mai mult decât că f are proprietatea lui Darboux şi anume că pentru orice $a, b \in [0,1]$, $a < b$ are loc $f([a,b]) = [0,1]$.

Deoarece $a < b$, ele vor avea scrierea binară:

$$a = 0{,}u_1u_2\dots u_s0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t0\dots$$
$$b = 0{,}u_1u_2\dots u_s1\dots$$

unde $s, t \in \mathbb{N}$, (dacă $s = 0$ sau $t = 0$, dispar cifrele $u_1u_2\dots u_s$ respectiv $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t$).

În scrierea lui a apar o infinitate de cifre 0, deoarece din $a < b$, rezultă $a < 1$, iar 1 este singurul număr care am convenit că are perioada 1.

Fie acum un $\lambda \in [0,1]$, $\lambda = 0{,}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\dots$.

Alegem $c = 0{,}u_1u_2\dots u_s0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t1\,1\underbrace{0\dots0}_{p \text{ ori}}\lambda_10\lambda_20\lambda_3\dots$, unde

$p \in \{1,2\}$ este ales astfel încât cifra 0 din faţa cifrei λ_1 să fie de rang impar în cadrul şirului cifrelor de după virgulă. Vom nota cu $\underline{0}$ această cifră 0. În scrierea lui c, şirul cifrelor de rang impar de după virgulă este:

$$u_1, u_3, \dots, 1, \underline{0}, 0, 0, \dots$$

Acest şir este periodic **începând** cu **0**, fiind constant nul. Nu poate fi periodic începând cu un termen de rang inferior, deoarece cifra 1 din fata cifrei $\underline{0}$ nu se regăseste în termenii de rang superior. Rezultă $f(c) = 0{,}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\dots = \lambda$.

Mai avem:

$$a = 0{,}u_1u_2\dots u_s0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t0\dots$$
$$c = 0{,}u_1u_2\dots u_s0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t1\dots$$
$$b = 0{,}u_1u_2\dots u_s1\dots$$

şi deci $c \in [a,b]$. λ fiind arbitrar în $[0,1]$, rezultă $f([a,b]) = [0,1]$. Aşadar f are proprietatea lui Darboux.

Mai mult, rezultă că pentru orice vecinătate V a unui număr $x_0 \in [0,1]$ are loc $f(V \cap [0,1]) = [0,1]$ obţinându-se de aici că f nu este continuă în x_0. x_0 fiind arbitrar, rezultă că f nu este continuă în nici un punct al domeniului de definiţie.

12.1.10. Corolar Există funcţii $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care transformă orice interval în $\mathbb{R}$, (aşadar funcţia w este nemărginită pe orice interval)

Demonstraţie: Considerăm $f : [0,1] \to [0,1]$ funcţia definită anterior şi funcţiile:

$$\varphi:\mathbb{R}\to[0,1],\varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x,$$

$$\psi:[0,1]\to\mathbb{R},\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=0 \text{ sau } x=1\\ \operatorname{tg}\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{dacă } x\in(0,1).\end{cases}$$

Evident funcţia φ este continuă, strict crescătoare, iar funcţia ψ este surjectivă. Fie $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, w=\psi\circ f\circ\varphi$. Pentru orice interval $I\subseteq\mathbb{R}$, $J=\varphi(I)$ este interval şi de aici $w(I)=\psi\circ f\circ\varphi(1)=\psi(f(\varphi(I)))=\psi(f(J))=\psi([0,1])=\mathbb{R}$.

Se cunoaşte comportarea aleatorie în raport cu operaţiile algebrice a funcţiilor cu proprietatea lui Darboux, acestea fiind stabile doar în raport cu compunerea funcţiilor (acolo unde compunerea se poate efectua; vezi paragraful 6.3.). Ne putem întreba ce se întâmplă dacă se întăresc cu puţin proprietăţile măcar a uneia dintre funcţii.

12.1.11. Propoziţie Există funcţii $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, u continuă şi v cu proprietatea lui Darboux astfel încât $u+v$ nu are proprietatea lui Darboux.

Demonstraţie: Considerăm funcţia w definită în Corolarul 12.1.10. Reamintim că pentru orice interval

$$I\subseteq\mathbb{R},\ w(I)=\mathbb{R}. \tag{1}$$

Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,w(x)=x\right\}$. Definim funcţia $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$v(x)=\begin{cases}w(x), & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus A\\ 1+x, & \text{dacă } x\in A.\end{cases}$$

Aşa definită, funcţia v are proprietatea că $v(x)\neq x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Vom arăta că v are proprietatea lui Darboux demonstrând că $(\forall)\ a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $v((a,b))=\mathbb{R}$.

Fie pentru aceasta $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi fie $y\in\mathbb{R}$. Din relaţia (1) deducem că există $x\in(a,b)$ astfel încât $w(x)=y$.

Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus A$, atunci obţinem:

$$v(x)=y \tag{2}$$

Dacă $x\in A$, atunci considerăm intervalul (x, b), rezultând din (1) că există $t\in(x,b)$ astfel încât $w(t)=y$.

Deoarece avem $t\neq x=w(x)=y=w(t)$, rezultă $t\notin A$ şi de aici

$$v(t)=w(t)=y \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă că există x sau t în intervalul (a, b) astfel încât $v(x)=y$ sau $v(t)=y$, adică $v((a,b))=\mathbb{R}$.

Considerăm acum $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=-x$, funcţie care este evident continuă.

Deoarece $v(x)\neq x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, rezultă că funcţia $u+v$ nu se anulează.

Alegem $x_1 < 0$ astfel ca $v(x_1) > 0$ şi $x_2 < 0$ astfel ca $v(x_2) < 0$.
Avem:

$$(u+v)(x_1) = -x_1 + v(x_1) > 0$$

$$(u+v)(x_2) = -x_2 + v(x_2) < 0$$

şi cum $u+v$ nu se anulează, rezultă că $u+v$ nu are proprietatea lui Darboux.

Bibliografie

1. V. Neagu, *Contraexemple în analiza matematică pentru licee*, Foaia Matematică, Chişinău, 1/1996
2. E. Popa, *Probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, Editura Moldova, Iaşi, 1995
3. B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted, *Contraexemple în analiză*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973
4. O. Konnerth, *Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1982